

小学校における「振り子の等時性」の実験について

木村 光輝★, 大後 忠志, 木村 出★★

理科教育講座

(平成17年9月30日受理)

- ★ 初等教員養成課程自然コース, 現在福岡教育大学大学院理科教育専攻
★★ 現在 福岡教育大学名誉教授

キーワード: 振り子の等時性, 大振幅運動, 空気抵抗の影響, 小学校理科教材

Abstract

振り子の等時性を調べる実験は, 小学校5年生の理科において選択単元として取り扱うこととされている。単振り子の等時性は, よく知られている現象であるが, 振れ幅の小さい時(微小振動)という条件下で導かれるものである。しかし, 授業で子ども達に実験させるとき, この条件が成り立たないことが多いにもかかわらず, 実験結果にどのように影響するのかということについては, これまで詳しく調べられたことはほとんどない。

本論文では, 小学校で使える道具を利用して振り子を作成し, 糸の長さ, 錘の質量, 振れ幅を変化させて, 振り子の周期や振幅がどのように変化するかを調べ, 微小振動が成り立たない条件での実験が, 振り子の等時性を導く結果にどのように影響するのかについて研究した。その結果, 小学校で実験するときには注意すべき, いくつかの点が具体的に明らかになった。

第1章 序論

小学校の理科の授業では選択単元として, 単振り子の運動を取り扱うこととされている¹⁾。学年は5年生である。5年生の理科では多様な自然現象において, 原因と結果の関係をつかむことがねらいとなっている。さらにその中から原因と結果の間の量的な関係を掴み取ることが大きな目標である。そのようなねらいに適した現象はそれほど多くはない。この「単振り子の運動」は, そのような教材の数少ない例である。

「単振り子の運動」のねらいは「振れ幅が大きくない限り, 往復の時間は振れ幅によらない」ことと「往復の時間は糸の長さのみによる」ことを子ども達が把握することである¹⁾。また, この実験を通して, 「何気なく見ている自然現象にはそれぞれある決まり(法則)が存在する」ということを認識させることがその背後の目的としてあるわけである。

しかし、子ども達が教室で実験した時、このような簡単な（しかもきれいな）結果が得られるとは限らない。むしろ、バラバラの結果が得られて取捨がつかなくなることが多い。例えば、子ども達が幾組かに分かれて実験したとしよう。教師は条件統一を心がけ、例えば糸の長さや初期角度を全員が同じにするよう指示するであろう。それでも振り子の往復の時間（周期）は各組毎に異なった値となり、子ども達は一定の決まりがあるとは思わない。バラバラのように見える実験結果から共通の決まり（法則）を取り出すには、どのような実験を行えばどのような結果が得られるか、あるいはどの程度のばらつきが得られるかを、教師は知っておく必要がある。例えば、錘の質量（重さ）を変えたとき周期がどのくらい変化するのかとか、振れ幅を変えたとき周期はどのくらい変化するのかということ等である。教師が単振り子の運動について十分な知識及び実験についての十分な体験を持っていれば、子ども達の実験結果のばらつきの原因を理解し、適切な指導をすることができる筈である。

他方、大学における物理学の授業では、単振り子の運動は、一般的に微小振動の場合のみが取り扱われている²⁾。いくつかの教科書では任意の振幅の場合の周期の計算式が示されているが、最終結果は楕円関数で与えられるとのみ記述していることが多い³⁾。また、理系の大学生であっても楕円関数の知識は殆ど学ぶことがない。大学の学生実験として行なうボルダの実験では、錘の大きさを考慮して慣性モーメントを計算し、剛体振り子（物理振り子）としてその運動を解析するが、それでも振れ幅に関して言えば、微小振動である⁴⁾。

このように単振り子の運動は単純であるにもかかわらず、実験的には意外に詳しく調べられていない。そのため、錘の質量（重さ）によって本当に周期に違いはないのかとか、空気による抵抗は周期にどの程度影響を与えるのかとか、何回往復させて平均を取るとよいのかとか、子ども達が納得できるようにするにはどのように実験をさせれば良いのか等々、多くの問題が残されている。

本論文では、小学校で使える道具を利用して様々な視点から条件を変えながら「振り子の等時性」について研究したので報告する。第2章では、実験方法とその実験結果について述べる。第3章では、実験結果の理論的解析について述べる。第4章では、小学校で行なう実験への提言とまとめについて述べる。

第2章 実験方法と実験結果

2.1 実験方法

実験に用いた器具と実験方法は次の通りである。

実験器具： タコ糸、油粘土、マーカー（爪楊枝）、拡大コピーした分度器、時間測定器（ビースピ（中村理工工業(株)））、スタンド、ビデオカメラ

実験方法：

- ① スタンドに拡大コピーした分度器を貼り付け、振れ幅（振れの角度）を読み取れるようにする。
- ② 油粘土を必要量（例えば30g）取り、球形に細工し、錘とする。
- ③ タコ糸の一端を油粘土球に固定する。
- ④ タコ糸の他端をスタンドの上部から張り出した横棒に取り付ける。この時、タコ糸の長

小学校における「振り子の等時性」の実験について

さ（スタンドへの取り付け点と錘の中心までの長さ）が、正確な長さ（例えば50cm）となるように調節する。

- ⑤微小振動させて錘の真下に付けたマーカーがビースピのセンサー間を正しく通るようにビースピの位置を調節する。
- ⑥タコ糸の長さ L 、錘の質量 m 、往復回数 n 及び初期角度 θ_0 を変えて往復時間を、ビースピを用いて測定する。
- ⑦タコ糸の長さ L 、錘の質量 m 、往復回数 n 、初期角度 θ_0 を変えて、最大振れ角 θ_m を、ビデオカメラを用いて測定する。

なお、振れ幅という表現はその定義がやや曖昧な点があるので、本論文では、糸が鉛直下方となす角を振れ角 θ とし、振れ角 θ で振れ方の大きさ（指導要領でいう「振れ幅」）を表すこととする。

2. 2 実験結果

A. 周期

タコ糸の長さ L を20cmから50cmまで10cm毎に変えて、それぞれの長さ毎に錘の質量 m を10gから50gまで10g毎に変化させ、さらに単振り子の初期角度 θ_0 を 5° 、 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 70° 、 90° にセットして往復時間を測定した。錘が単振り子の支点の鉛直下方を最初に通過するとき

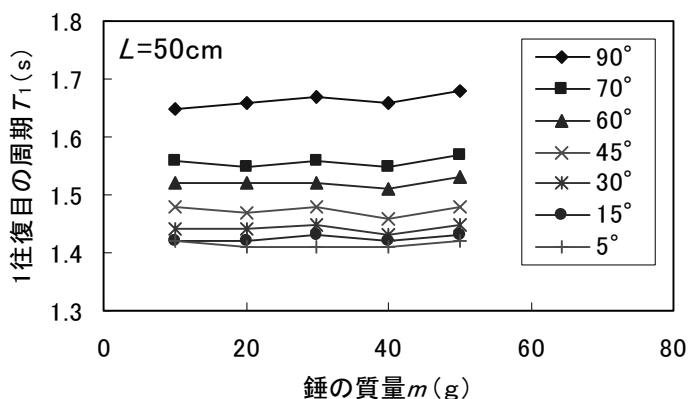


図1 種々の初期角度 θ_0 における錘の質量 m と1往復目の周期 T_1 の関係。ここで、糸の長さ $L = 50\text{cm}$ である。

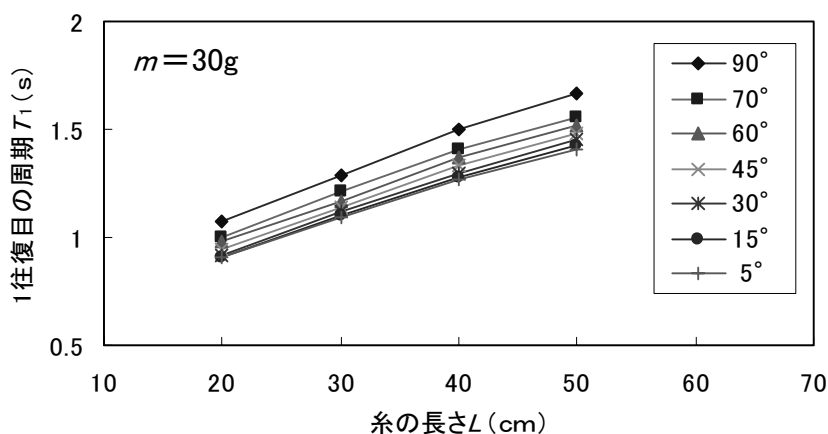


図2 種々の初期角度 θ_0 における糸の長さ L と1往復目の周期 T_1 の関係。ここで錘の質量 $m = 30\text{g}$ である。

にビースピが時間を計測し始める。計測開始後の1往復, 3往復, 5往復, 10往復に要する時間 T_1, T_3, T_5, T_{10} を測定した。測定結果 (同じ測定を5回行い, その平均値) の一例として, 1往復目の周期 T_1 と糸の長さ L , 質量 m 及び初期角度 θ_0 の関係を図1及び図2に示す。また, 初期角度 θ_0 が 60° 及び 90° の場合について, 1往復目の周期 T_1 及び10往復の平均周期 $T_{10}/10$ と糸の長さ L の関係を図3に示した。より詳しい数値やその他の場合の測定結果は, 附録の附表1.1~附表4.5にまとめた。

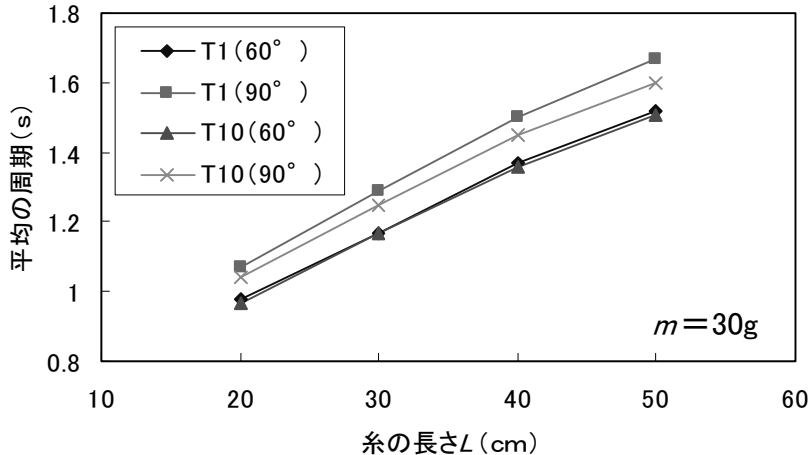


図3 初期角度 θ_0 と 60° 及び 90° の場合について, 糸の長さ L と1往復目の周期 T_1 及び10往復の平均周期 $T_{10}/10$ の関係。ここで錘の質量 $m = 30\text{g}$ である。

B. 振れ幅 (最大振れ角)

タコ糸の長さ L を20cmから50cmまで10cm毎に変えて, それぞれの長さ毎に錘の質量 m を10gから50gまで10g毎に変化させ, さらに単振り子の初期角度 θ_0 を $5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ にセットして, 往復時間を測定した。錘の往復運動をビデオカメラで正面から撮影し, 1往復から10往復までの往復毎に, 錘が最も振れた角度 (最大振れ角) θ_m をビデオのコマ送り機能を利用して測定した。種々の初期角度 θ_0 , 糸の長さ L , 錘の質量 m に対する最大振れ角 θ_m と往復回数 n の関係の測定結果 (5回の測定の平均値) の一部を図4~図6に示す。詳しい数値は附録の附表5.1~附表8.5にまとめた。

小学校における「振り子の等時性」の実験について

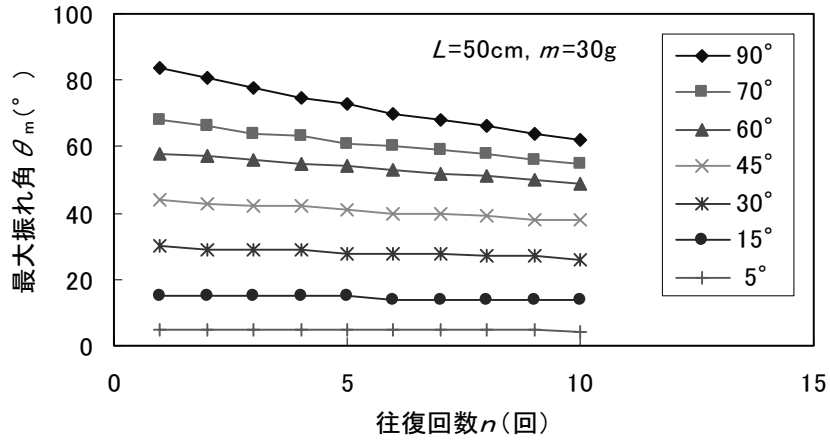


図4 種々の初期角度 θ_0 における往復回数 n と最大振れ角 θ_m の関係。ここで糸の長さ $L = 50\text{cm}$ ，錘の質量 $m = 30\text{g}$ である

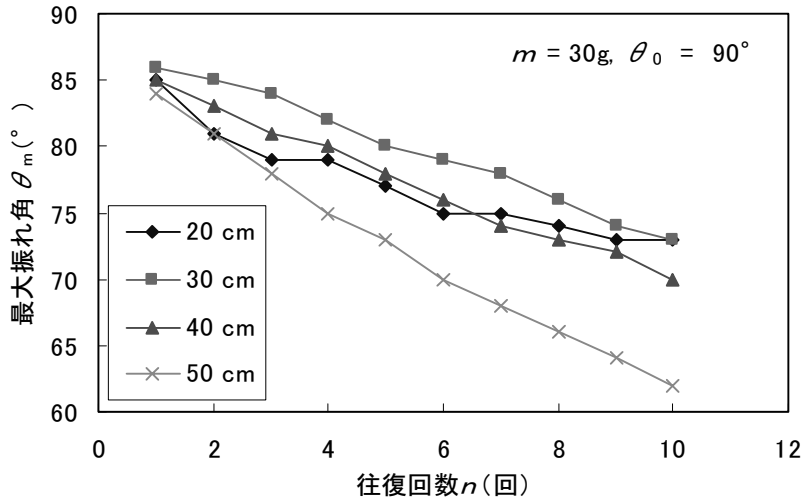


図5 種々の糸の長さ L における往復回数 n と最大振れ角 θ_m の関係。ここで初期角度 $\theta_0 = 90^\circ$ ，錘の質量 $m = 30\text{g}$ である。

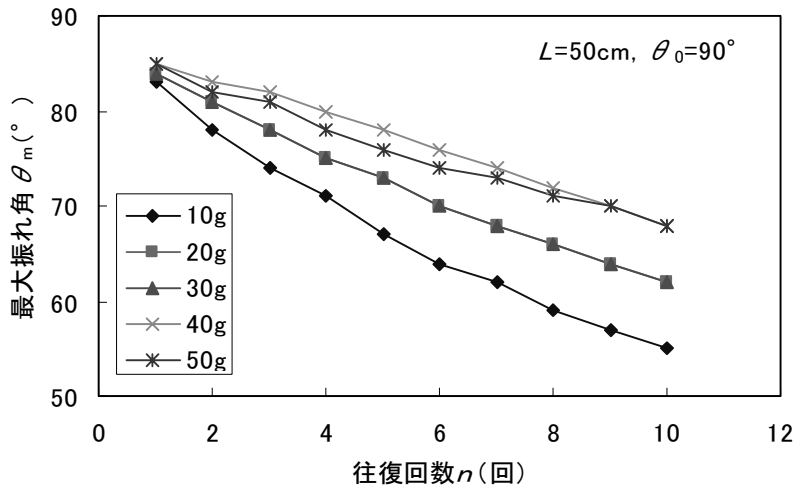


図6 種々の錘の質量 m における往復回数 n と最大振れ角 θ_m の関係。ここで糸の長さ $L = 50\text{cm}$, 初期角度 $\theta_0 = 90^\circ$ である。

第3章 単振り子の運動の理論と考察

長さ L の糸に取り付けられた質量 m の単振り子の運動は、

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta - kL \frac{d\theta}{dt}, \quad (1)$$

で表わされる。ここで g は重力の加速度の大きさであり、 θ は糸が鉛直下方となす角度である。また錘に働く抵抗は速さに比例すると仮定し、 k はその比例係数である。運動方程式 (1) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -q^2 \sin\theta - p \frac{d\theta}{dt}, \quad (2)$$

と書き換えられる。ここで

$$q^2 = \frac{g}{L}, \quad p = \frac{k}{m}, \quad (3)$$

と置いた。

3. 1 微小振動における周期

まず $p = 0$ と仮定し、さらに $\sin \theta = \theta$ と近似する。この時、錘の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -q^2\theta, \quad (4)$$

と書くことができる。従って、錘の運動は

$$\theta = \theta_0 \cos(qt + \alpha), \quad (5)$$

と与えられる。周期 T_0 は

$$T_0 = \frac{2\pi}{q} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$

で与えられる。(5)式から分かるように、この場合、錘は一定の振幅(初期角度 θ_0)で往復運動をし、その周期 T_0 は振幅(初期角度 θ_0)や錘の質量 m に無関係である。但し、(5)式の運動では初期角度 θ_0 について条件が付加されており、 $\sin \theta_0 = \theta_0$ が成立する必要がある。

図1を見ると、1往復目の周期 T_1 は、錘の質量 m にはほとんど依存しないことが分かる。そこで、錘の質量が20gの場合を例にとり、微小振動($\sin \theta = \theta$)の近似について調べてみよう。

その為に、初期角度 θ_0 が 5° の場合(測定値A)、 15° の場合(測定値B)及び 30° の場合(測定値C)の最初の1往復目の周期の測定値 T_1 と(6)式による計算値 T_0 との比較を表1に示す。

表1より分かるように、測定値A(初期角度 5°)、B(初期角度 15°)と計算値はよく一致しているが、測定値C(初期角度 30°)は少しずれている。従って、微小振動として計算された(6)式による T_0 は、実際には初期角度 15° くらいまでは十分に良い近似となっていると言える。

他方、初期角度 θ_0 が 30° 以上になると1往復目の周期 T_1 の測定値は(6)式による計算値 T_0 に比べ、明らかに長くなっている。具体的に、 $L = 50\text{cm}$ 、 $m = 20\text{g}$ の場合に、 T_1 の θ_0 による変化を表2に示す。ここで、表2における第3欄の周期比とは、 5° における測定値に対する各初期角度における測定値の比の値である。初期角度が 90° になると、周期は初期角度が 5° の時に比べて18%も大きくなっている。この結果は、初期角度が大きくなると、微小振動($\sin \theta = \theta$)という近似が十分ではなくなることを示している。

表 1 微小振動における測定値 T_1 と計算値 T_0 の比較

| L (cm) | 測定値A(s) | 測定値B(s) | 測定値C(s) | 計算値(s) |
|----------|---------|---------|---------|--------|
| 20 | 0.91 | 0.91 | 0.92 | 0.90 |
| 30 | 1.11 | 1.11 | 1.12 | 1.10 |
| 40 | 1.27 | 1.27 | 1.29 | 1.27 |
| 50 | 1.41 | 1.42 | 1.44 | 1.42 |

表 2 初期角度による周期 T_1 の違い。但し, $L=50\text{cm}$, $m=20\text{g}$ である

| 初期角度 | 周期 T_1 (s) | 周期比 ($T_1/T_1(5^\circ)$) |
|------------|--------------|----------------------------|
| 5° | 1.41 | 1.00 |
| 15° | 1.42 | 1.01 |
| 30° | 1.44 | 1.02 |
| 45° | 1.47 | 1.04 |
| 60° | 1.52 | 1.08 |
| 70° | 1.55 | 1.10 |
| 90° | 1.66 | 1.18 |

3. 2 大振幅振動における周期

第 2 の場合として, $\sin \theta = \theta$ という近似が成立しない場合を考察する。但し, 錘には抵抗が働かないものとする。即ち, $p=0$ であるとする。従って, 錘の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -q^2 \sin \theta, \quad (7)$$

である。この場合の厳密な周期は第 1 種完全楕円積分で与えられる³⁾。級数計算 (次の項が 10^{-9} 以下となるまで和を取る) による具体的な数値を表 3 に示す。これらの値は厳密解⁵⁾ とほとんど一致している。

大振幅における周期はその他の近似的な方法でも計算されてきた。例えば, 長島はランデン変換を用いた方法で周期を計算した⁶⁾。また, 続木は蛙飛びの方法で数値計算した⁵⁾。どちらの方法も表 3 に示した厳密解とよく一致した結果を与えている。表 2 と表 3 を

小学校における「振り子の等時性」の実験について

比較すると大振幅の測定値と計算値は大変よく一致していることが分かる。

表 3 第一種楕円関数による周期

| 初期角度 | 周期比 | 初期角度 | 周期比 |
|------|----------|------|----------|
| 5° | 1.000476 | 50° | 1.049783 |
| 10° | 1.001907 | 55° | 1.060829 |
| 15° | 1.004301 | 60° | 1.073182 |
| 20° | 1.007669 | 65° | 1.086922 |
| 25° | 1.012031 | 70° | 1.102145 |
| 30° | 1.017408 | 75° | 1.118959 |
| 35° | 1.023833 | 80° | 1.137493 |
| 40° | 1.031341 | 85° | 1.157895 |
| 45° | 1.039973 | 90° | 1.180341 |

3. 3 抵抗の効果

これまで、1往復目の周期の測定値 T_1 は、大振幅の理論計算によってよく説明できることを示してきた。附表1.1～附表4.5に示された種々の測定結果を見ると、往復回数が3往復、5往復、10往復と増えると、各往復の周期は減少することが分かる。このことは、1往復毎に最大振幅が減少し、それに対応して周期も減少しているとして理解できる。最大振幅が減少するのは錘に働く抵抗力の効果であることは明らかである。そこで、錘に働く抵抗力が錘の速さに比例するとして、往復運動の繰り返しにおいて1往復ごとの所要時間を計算してみよう。錘の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -q^2 \sin\theta - p \frac{d\theta}{dt}, \quad (2)$$

である。この方程式を解析的に解くことは困難なのでルンゲークッタ法により、パソコンによる数値計算で解を求めた。 p の値をパラメータとして実験値を最もよく再現することを試みた。表4にその一例を示す。

表4から分かるように、抵抗のパラメータ p を適当に選べば、周期の測定値と計算値は10往復までの全ての測定値において有効数字3桁の範囲でよく一致している。このことは、単振り子の運動においては錘の速さに比例する抵抗力がその運動に大きな影響を与えていることを示している。この結果、1往復に要する時間（周期）は往復回数が増えるに従って減少する（周期が短くなる）。

次に、 $L=50\text{cm}$ 、 $m=20\text{g}$ 及び初期角度が 90° 、 70° 、 60° の場合について最大振れ角が往復回数と共にどのように減少するかについて、表5において測定値と計算値を比較してみよう。

表5を見ると測定値と計算値は大体一致している。ここで用いた抵抗パラメータの値は、表4において最適の一致を与えるように選ばれた値である。他方、計算値を測定値とより一致するように選ぶことも可能である。しかしながら、最大振れ角はビデオカメラを用いて最大に振れた糸のなす角度を分度器で読み取るという今回の方法ではそれ程精度の高い測定値は得られない。(ビデオカメラにより撮影された映像のコマ送りの最小値は1/30秒である。) 実際、測定値にはかなりのばらつきがみられるし、当然誤差もあると考えられる。それ故この測定値に最もよく一致するように抵抗パラメータの値を選んでその絶対値にはそれ程大きな意味はないであろう。

表4 往復回数と累積周期の関係

| 初期角度 | 90° | | 70° | | 60° | |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 測定値(s) | 計算値(s) | 測定値(s) | 計算値(s) | 測定値(s) | 計算値(s) |
| 1 | 1.66 | 1.656 | 1.55 | 1.557 | 1.52 | 1.519 |
| 2 | | 3.290 | | 3.105 | | 3.033 |
| 3 | 4.91 | 4.904 | 4.65 | 4.645 | 4.54 | 4.542 |
| 4 | | 6.501 | | 6.177 | | 6.047 |
| 5 | 8.08 | 8.083 | 7.70 | 7.702 | 7.55 | 7.548 |
| 6 | | 9.651 | | 9.220 | | 9.045 |
| 7 | | 11.206 | | 10.733 | | 10.538 |
| 8 | | 12.751 | | 12.239 | | 12.028 |
| 9 | | 14.286 | | 13.741 | | 13.514 |
| 10 | 15.81 | 15.812 | 15.24 | 15.237 | 15.00 | 14.997 |

$L=50\text{cm}$, $m=20\text{g}$ 及び種々の初期角度の場合における累積周期の測定値と計算値の比較。抵抗のパラメータ p の値は、 $p=0.046$ (90°), $p=0.037$ (70°), $p=0.030$ (60°) である。

表5 往復回数と最大振れ角の関係

| 初期角度 | 90° | | 70° | | 60° | |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 測定値(°) | 計算値(°) | 測定値(°) | 計算値(°) | 測定値(°) | 計算値(°) |
| 1 | 84 | 86.1 | 68 | 67.8 | 58 | 58.6 |
| 2 | 81 | 82.5 | 65 | 65.8 | 56 | 57.2 |
| 3 | 78 | 79.1 | 63 | 63.8 | 55 | 55.8 |
| 4 | 75 | 75.9 | 61 | 61.9 | 53 | 54.5 |
| 5 | 73 | 72.9 | 59 | 60 | 52 | 53.2 |
| 6 | 70 | 70.1 | 58 | 58.3 | 50 | 52 |
| 7 | 68 | 67.4 | 55 | 56.6 | 49 | 50.8 |
| 8 | 66 | 64.9 | 54 | 54.9 | 47 | 49.6 |
| 9 | 64 | 62.5 | 52 | 53.4 | 46 | 48.5 |
| 10 | 62 | 60.2 | 51 | 51.8 | 45 | 47.4 |

小学校における「振り子の等時性」の実験について

$L=50\text{cm}$, $m=20\text{g}$ 及び種々の初期角度の場合における最大振れ角の測定値と計算値の比較。抵抗のパラメータ p の値は, $p=0.046$ (90°), $p=0.037$ (70°), $p=0.030$ (60°) である。

錘に働く抵抗が空気抵抗であると仮定すれば, ストークスの法則により p は

$$p = \frac{6\pi\eta a}{m}, \quad (8)$$

で与えられる⁷⁾。ここで, a は錘の半径, η は空気の粘性率である。今回得られた p の値 $p=0.030 \sim 0.046$ から空気の粘性率を求めると $m=20\text{g}$, $a=1.2\text{cm}$ を用いて,

$$\eta = (3.70 \sim 4.15) \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \quad (9)$$

を得る。粘性率のこの値は, 20°C における空気の粘性率の値より1桁ほど大きい⁸⁾。この事実は, 錘の運動に与える抵抗が単に錘に働く速さに比例する空気抵抗のみによるものだけではないことを示していると考えるべきであろう。この点については, なお種々の角度から研究する必要がある, これからの問題である。

一方, これまでの議論では, 錘を質点として取り扱ってきた。周期の大きさについては錘を剛体として扱い, その形や大きさに応じて慣性モーメントへの補正を考慮する必要があることが知られている⁴⁾。しかし, 今回使用した錘の半径は糸の長さに比べ1/10程度以下でありこれによる周期への補正は無視できると考えて良い。

第4章 小学校で行なう実験への提案とまとめ

第3章では, 今回の実験結果をモデルと比較することを通して実験結果の本質的な理解を試みてきた。その結果, 今回の実験結果は理論によって十分説明できることが明らかになった。次に, 小学生に実験をさせる場合にどのように進めると良いかという視点から, 今回の実験結果を検討してみよう。

4.1 質量を変える

錘の質量(重さ)を変えると周期はどの程度変化するであろうか。一例として図1に, $L=50\text{cm}$ の場合について, 錘の質量によって1往復目の周期 T_1 がどのように変化するかを示した。図1を見ると不規則に変化しているように思えるが, 図1では違いが強調して描かれている。最も周期の長い初期角度 $\theta_0=90^\circ$ の場合では, T_1 は1.65秒 ($m=20\text{g}$) から1.68秒 ($m=50\text{g}$) と0.03秒の間に分布している。他の初期角度の場合もほぼ同様である。しかし, 小学生にとってこの違いは誤差の範囲内であると言ってよい。10往復の時間を測定したとしても, 16.5秒と16.8秒となり0.3秒の違いにしかならないからである。

子ども達が錘の質量(重さ)を変えて周期を測定した時, 糸の長さが同じならば, た

とえ初期角度が違っていても、ほぼ同じとみなせる測定値が得られるはずである。従って、大きく違う周期が得られたら、その原因は質量（重さ）の違い以外の条件によるものであると考えるが良い。

4. 2 糸の長さを変える

糸の長さを変えたとき、周期がどのように変化するかを調べてみよう。一例として、図2に $m=30g$ の場合について、糸の長さによって周期 T_1 がどのように変化するかを示した。図2を見ると、1/10秒の桁が変化していることが分かる。少し詳しく数値を見てみよう。初期角度 $\theta_0=90^\circ$ の場合、周期 T_1 の値は1.07秒 ($L=20cm$) から1.67秒 ($L=50cm$) へと0.60秒増加している。また初期角度 $\theta_0=5^\circ$ の場合には、周期 T_1 の値は、0.91秒 ($L=20cm$) から1.41秒 ($L=50cm$) へと0.50秒増加している。この違いは小学生でも十分に測定できる値である。増加率で見ると、 $L=20cm$ の場合と $L=50cm$ の場合とで周期は初期角度 $\theta_0=90^\circ$ の場合1.56倍に、初期角度 $\theta_0=5^\circ$ の場合1.55倍になっている。理論的には $50/20=2.5$ の平方根 ($=1.58$) 倍になる。他の場合についても殆ど1.5~1.6倍の範囲内にある。 $L=80cm$ で実験すれば、 $L=20cm$ の場合に比べ周期は2倍になるはずである。そこで、糸の長さ $L=80cm$ 、錘の質量 $m=50g$ で実験を行ったところ、 $L=20cm$ の場合に比べ初期角度 5° の時2.01倍、 90° の時1.99倍であった。 $L=80cm$ 、錘の質量 $m=50g$ における詳しい実験結果は附表9にまとめた。

図7に錘の質量 $m=50g$ の場合に初期角度 5° と 90° として、1往復目の周期 T_1 を糸の長さの平方根 \sqrt{L} に対してプロットしたものを示す。初期角度が違っていても、測定値と計算値がよく一致していることがわかる。

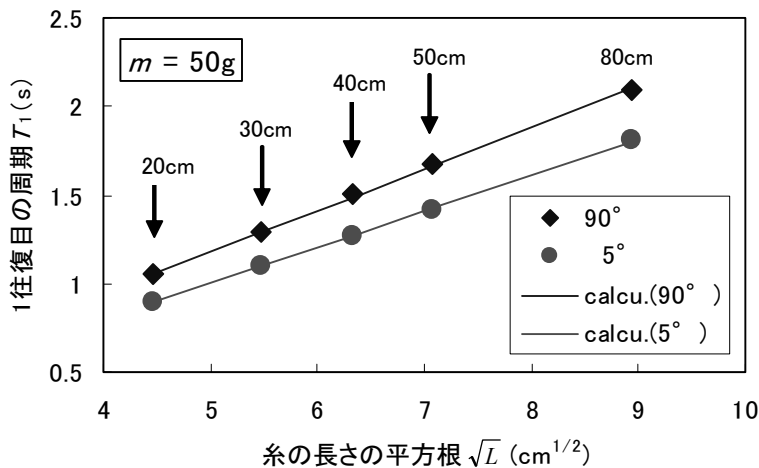


図7 糸の長さの平方根 \sqrt{L} と1往復目の周期 T_1 との関係。ここで、錘の質量 $m=50g$ である。

計算値がよく一致していることがわかる。したがって、測定すべき糸の長さを2倍以上変化させて数通りの糸の長さについて周期を測定すれば、装置における長さの測定や設定にばらつきが

小学校における「振り子の等時性」の実験について

あっても周期の値はそれぞれ違った値のグループとしてうまくまとめられることが予想できる。

4. 3 初期角度を変える

次に、初期角度によってどの程度周期が変化するかを見てみよう。理論的には3. 2節で議論したように、微小振動の場合に比べ、 90° の場合には1.18034倍となることが示されている。一方、表2には今回の測定結果の数値の一例を示した。この表によると、実験により求めた値は理論値と同じ1.18倍である。これは注意深く実験すれば見つけられる程度の差である。しかし、小学生が実験する場合には、実験技術の不十分さを考慮するとこの違いを実験誤差と区別するのは難しいであろう。初期角度による周期を見ると、初期角度 60° までは 5° の時と比べて10往復でも累積周期の差は1秒以内であることがわかる。従って、子ども達には、初期角度は 60° までの2箇所あるいは3箇所を選んでスタートするよう指示しておけば十分である。

また、子ども達の測定値がばらついた場合、初期角度の違いも原因の一つとして考察したり発展的学習として詳しく調べたりすれば良い。

4. 4 往復回数は何回で測定するか

最後に往復回数による周期の違いについて見てみよう。3. 3節で議論したように往復運動を繰り返すと振幅が減少する。振幅が減少すると周期は18%以内で減少する。このことは1往復よりも10往復から計算した周期の方が短くなることを意味する。そこで、初期角度 60° の場合と 90° の場合について、1往復目の周期 T_1 と10往復の平均周期($T_{10}/10$)を糸の長さを変えて比較したのが図3である。初期角度 60° の場合、 $L=20\text{cm}$ では $T_1=0.97\text{秒}$ 、 $T_{10}/10=0.98\text{秒}$ と0.01秒の違いであり、 $L=50\text{cm}$ では $T_1=1.51\text{秒}$ 、 $T_{10}/10=1.52\text{秒}$ と0.01秒の違いである。また初期角度 90° の場合、 $L=20\text{cm}$ では $T_1=1.04\text{秒}$ 、 $T_{10}/10=1.07\text{秒}$ と0.03秒の違いであり、 $L=50\text{cm}$ では $T_1=1.61\text{秒}$ 、 $T_{10}/10=1.67\text{秒}$ と0.07秒の違いである。これらの違いは、10往復の時間を測定しても0.1秒の差も出ないため、実験誤差と区別できないであろう。従って、1往復できちりと計測しようとする困難よりも数回往復させて時間を測定し、その平均を周期とする方がよいと結論できる。

4. 5 まとめ

小学生が実験するとき、最も確実に学んで欲しいことは、周期が錘の重さにも振れ幅にも関係なく、糸の長さによってのみ大きく変わることである。その為には、糸の長さを数通り、例えば20cm, 50cm, 100cm,・・・というように、次々に2倍以上の長さを選べば良い。その上で、5~10回程度錘を往復させて周期を測定すればよい。錘の質量(重さ)を変えても周期は殆ど変化しないはずである。初期角度についてもそれほど気にする必要はない。往復回数も10回程度までならあまり影響はない。長さを2倍以上変化させて測定すれば他の効果はその周辺に測定値が散らばる効果となって表れる。教師は「振り子の周期は糸の長さで最も大きく変わるようだね」と結論すれば良い。

今回の実験とその理論的解析から得られた結論をまとめると以下ようになる。

1. 単振り子の周期は、振れの角度が十分に小さければ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

で与えられる値と一致する。即ち、糸の長さのみによって周期は異なり、周期は糸の長さの平方根に比例する。糸の長さが長いほど、単振り子の周期は長く、糸の長さが4倍になるとき周期は2倍になる。

2. 錘の重さ（質量）や大きさによって単振り子の周期は殆ど変化しない。
3. 単振り子の周期は初期角度によってほんの少し変化する。初期角度が大きくなると周期は長くなる。しかし、初期角度が 90° の場合でも、 5° の場合（微小振動）より約18%長くなる程度である。
4. 空気等の影響による抵抗のため、往復運動を繰り返すうちに最大振れ角は次第に減少し、それに伴って1往復に要する時間も減少する。

参考・引用文献

- 1) 小学校指導要領解説 理科編：文部省，平成11年5月
- 2) 例えば，「新編物理学」藤城敏幸著，東京教学社，1996年；
「新物理学ライブラリ2 力学 新定版」阿部龍蔵著，サイエンス社，1992年 等
- 3) 例えば，「力学」原島 鮮，裳華房，昭和38年；「初等力学」園田 久，廣川書店，昭和56年 等
- 4) 例えば，「六訂版 物理学実験」吉田卯三郎，武居文助，橋 芳実，武居文雄共著，三省堂，1994年
- 5) 続木章三：物理教育，第49巻，第4号，2001年，p.344
- 6) 長島弘幸：大学の物理教育，1998-1号，p.42
- 7) 例えば，「物理学（改訂版）」：小出昭一郎，裳華房，昭和59年 等
- 8) 例えば，「理科年表」第64冊：国立天文台編，丸善，1991

小学校における「振り子の等時性」の実験について

附録

A. 周期

種々の初期角度に対する最大振れ角の測定結果（5回の測定の平均値）。
 表中の数字の単位は秒である。

附表1.1 $L = 20\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 0.90 | 2.71 | 4.51 | 9.00 |
| 15° | 0.91 | 2.73 | 4.53 | 9.07 |
| 30° | 0.91 | 2.77 | 4.58 | 9.13 |
| 45° | 0.93 | 2.82 | 4.68 | 9.38 |
| 60° | 0.97 | 2.91 | 4.83 | 9.63 |
| 70° | 0.99 | 2.98 | 4.92 | 9.81 |
| 90° | 1.06 | 3.15 | 5.23 | 10.27 |

附表1.2 $L = 20\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 0.91 | 2.71 | 4.51 | 9.01 |
| 15° | 0.91 | 2.72 | 4.53 | 9.07 |
| 30° | 0.92 | 2.76 | 4.59 | 9.17 |
| 45° | 0.93 | 2.82 | 4.68 | 9.35 |
| 60° | 0.96 | 2.90 | 4.84 | 9.60 |
| 70° | 1.00 | 2.98 | 4.95 | 9.85 |
| 90° | 1.06 | 3.15 | 5.23 | 10.28 |

附表1.3 $L = 20\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 0.91 | 2.76 | 4.60 | 9.11 |
| 15° | 0.91 | 2.76 | 4.58 | 9.16 |
| 30° | 0.92 | 2.78 | 4.63 | 9.25 |
| 45° | 0.94 | 2.84 | 4.73 | 9.44 |
| 60° | 0.98 | 2.92 | 4.86 | 9.68 |
| 70° | 1.00 | 2.99 | 4.97 | 9.88 |
| 90° | 1.07 | 3.19 | 5.27 | 10.40 |

附表1.4 $L = 20\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 0.90 | 2.71 | 4.52 | 9.01 |
| 15° | 0.90 | 2.73 | 4.54 | 9.05 |
| 30° | 0.91 | 2.75 | 4.58 | 9.16 |
| 45° | 0.93 | 2.81 | 4.68 | 9.34 |
| 60° | 0.96 | 2.90 | 4.81 | 9.60 |
| 70° | 0.99 | 2.98 | 4.95 | 9.84 |
| 90° | 1.05 | 3.15 | 5.20 | 10.25 |

附表1.5 $L = 20\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 0.90 | 2.71 | 4.50 | 8.99 |
| 15° | 0.90 | 2.72 | 4.52 | 9.03 |
| 30° | 0.91 | 2.75 | 4.57 | 9.12 |
| 45° | 0.93 | 2.81 | 4.67 | 9.32 |
| 60° | 0.96 | 2.89 | 4.82 | 9.58 |
| 70° | 0.99 | 2.96 | 4.93 | 9.79 |
| 90° | 1.05 | 3.13 | 5.20 | 10.27 |

附表2.1 $L = 30\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.10 | 3.30 | 5.48 | 10.96 |
| 15° | 1.10 | 3.31 | 5.50 | 11.00 |
| 30° | 1.11 | 3.36 | 5.57 | 11.13 |
| 45° | 1.14 | 3.42 | 5.68 | 11.35 |
| 60° | 1.17 | 3.52 | 5.85 | 11.64 |
| 70° | 1.20 | 3.61 | 5.97 | 11.85 |
| 90° | 1.28 | 3.82 | 6.30 | 12.37 |

附表2.2 $L = 30\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.11 | 3.31 | 5.50 | 11.03 |
| 15° | 1.11 | 3.33 | 5.53 | 11.06 |
| 30° | 1.12 | 3.37 | 5.60 | 11.18 |
| 45° | 1.14 | 3.43 | 5.72 | 11.41 |
| 60° | 1.18 | 3.54 | 5.89 | 11.72 |
| 70° | 1.22 | 3.62 | 6.02 | 11.94 |
| 90° | 1.29 | 3.84 | 6.34 | 12.45 |

附表2.3 $L = 30\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.09 | 3.30 | 5.49 | 10.99 |
| 15° | 1.10 | 3.32 | 5.52 | 11.04 |
| 30° | 1.12 | 3.36 | 5.59 | 11.17 |
| 45° | 1.14 | 3.42 | 5.71 | 11.40 |
| 60° | 1.17 | 3.53 | 5.87 | 11.70 |
| 70° | 1.21 | 3.62 | 6.00 | 11.92 |
| 90° | 1.29 | 3.83 | 6.34 | 12.49 |

附表2.4 $L = 30\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.11 | 3.34 | 5.56 | 11.07 |
| 15° | 1.11 | 3.34 | 5.57 | 11.13 |
| 30° | 1.13 | 3.38 | 5.64 | 11.28 |
| 45° | 1.15 | 3.46 | 5.76 | 11.49 |
| 60° | 1.19 | 3.56 | 5.93 | 11.81 |
| 70° | 1.22 | 3.64 | 6.06 | 12.04 |
| 90° | 1.30 | 3.86 | 6.39 | 12.59 |

附表2.5 $L = 30\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.10 | 3.32 | 5.53 | 11.08 |
| 15° | 1.11 | 3.36 | 5.55 | 11.08 |
| 30° | 1.12 | 3.36 | 5.60 | 11.20 |
| 45° | 1.14 | 3.43 | 5.73 | 11.43 |
| 60° | 1.17 | 3.53 | 5.89 | 11.72 |
| 70° | 1.21 | 3.63 | 6.04 | 11.99 |
| 90° | 1.29 | 3.84 | 6.34 | 12.51 |

小学校における「振り子の等時性」の実験について

附表3.1 $L = 40\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.27 | 3.82 | 6.36 | 12.71 |
| 15° | 1.27 | 3.85 | 6.38 | 12.77 |
| 30° | 1.29 | 3.90 | 6.46 | 12.91 |
| 45° | 1.32 | 3.98 | 6.58 | 13.13 |
| 60° | 1.36 | 4.08 | 6.76 | 13.43 |
| 70° | 1.40 | 4.17 | 6.91 | 13.69 |
| 90° | 1.48 | 4.39 | 7.23 | 14.20 |

附表3.2 $L = 40\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.27 | 3.81 | 6.34 | 12.70 |
| 15° | 1.27 | 3.82 | 6.38 | 12.75 |
| 30° | 1.29 | 3.87 | 6.45 | 12.89 |
| 45° | 1.32 | 3.94 | 6.57 | 13.11 |
| 60° | 1.36 | 4.06 | 6.76 | 13.42 |
| 70° | 1.39 | 4.15 | 6.90 | 13.66 |
| 90° | 1.48 | 4.40 | 7.26 | 14.25 |

附表3.3 $L = 40\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.27 | 3.85 | 6.41 | 12.78 |
| 15° | 1.28 | 3.85 | 6.41 | 12.83 |
| 30° | 1.30 | 3.90 | 6.49 | 12.93 |
| 45° | 1.33 | 3.98 | 6.63 | 13.23 |
| 60° | 1.37 | 4.10 | 6.82 | 13.57 |
| 70° | 1.41 | 4.20 | 6.97 | 13.84 |
| 90° | 1.50 | 4.46 | 7.37 | 14.49 |

附表3.4 $L = 40\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.27 | 3.82 | 6.35 | 12.71 |
| 15° | 1.27 | 3.82 | 6.37 | 12.75 |
| 30° | 1.29 | 3.88 | 6.45 | 12.90 |
| 45° | 1.32 | 3.95 | 6.59 | 13.14 |
| 60° | 1.36 | 4.07 | 6.78 | 13.48 |
| 70° | 1.40 | 4.17 | 6.94 | 13.77 |
| 90° | 1.49 | 4.43 | 7.31 | 14.40 |

附表3.5 $L = 40\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.27 | 3.84 | 6.41 | 12.81 |
| 15° | 1.28 | 3.85 | 6.41 | 12.84 |
| 30° | 1.30 | 3.90 | 6.49 | 12.98 |
| 45° | 1.33 | 3.98 | 6.63 | 13.23 |
| 60° | 1.37 | 4.10 | 6.83 | 13.59 |
| 70° | 1.41 | 4.20 | 6.99 | 13.87 |
| 90° | 1.51 | 4.49 | 7.42 | 14.60 |

附表4.1 $L = 50\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.42 | 4.25 | 7.11 | 14.21 |
| 15° | 1.42 | 4.27 | 7.13 | 14.27 |
| 30° | 1.44 | 4.32 | 7.22 | 14.42 |
| 45° | 1.48 | 4.41 | 7.36 | 14.65 |
| 60° | 1.52 | 4.52 | 7.53 | 14.94 |
| 70° | 1.56 | 4.63 | 7.68 | 15.17 |
| 90° | 1.65 | 4.88 | 8.01 | 15.64 |

附表4.2 $L = 50\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.41 | 4.26 | 7.07 | 14.17 |
| 15° | 1.42 | 4.27 | 7.12 | 14.25 |
| 30° | 1.44 | 4.33 | 7.20 | 14.40 |
| 45° | 1.47 | 4.42 | 7.36 | 14.66 |
| 60° | 1.52 | 4.54 | 7.55 | 15.00 |
| 70° | 1.55 | 4.65 | 7.70 | 15.24 |
| 90° | 1.66 | 4.91 | 8.08 | 15.81 |

附表4.3 $L = 50\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.41 | 4.27 | 7.11 | 14.23 |
| 15° | 1.43 | 4.29 | 7.14 | 14.29 |
| 30° | 1.45 | 4.34 | 7.23 | 14.45 |
| 45° | 1.48 | 4.41 | 7.36 | 14.65 |
| 60° | 1.52 | 4.57 | 7.58 | 15.06 |
| 70° | 1.56 | 4.67 | 7.75 | 15.34 |
| 90° | 1.67 | 4.94 | 8.15 | 15.98 |

附表4.4 $L = 50\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.41 | 4.26 | 7.07 | 14.15 |
| 15° | 1.42 | 4.25 | 7.08 | 14.16 |
| 30° | 1.43 | 4.30 | 7.16 | 14.32 |
| 45° | 1.46 | 4.40 | 7.32 | 14.59 |
| 60° | 1.51 | 4.51 | 7.51 | 14.67 |
| 70° | 1.55 | 4.63 | 7.69 | 15.25 |
| 90° | 1.66 | 4.92 | 8.13 | 15.98 |

附表4.5 $L = 50\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|------|-------|
| 5° | 1.42 | 4.27 | 7.12 | 14.22 |
| 15° | 1.43 | 4.30 | 7.16 | 14.30 |
| 30° | 1.45 | 4.34 | 7.23 | 14.45 |
| 45° | 1.48 | 4.43 | 7.38 | 14.73 |
| 60° | 1.53 | 4.56 | 7.60 | 15.11 |
| 70° | 1.57 | 4.70 | 7.80 | 15.44 |
| 90° | 1.68 | 4.98 | 8.21 | 16.10 |

小学校における「振り子の等時性」の実験について

B. 振れ幅（最大振れ角）

種々の初期角度に対する最大振れ角の測定結果（5回の測定の平均値）。

表中の数字の単位は角度（°）である。

附表5.1 $L = 20\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 |
| 45° | 44 | 44 | 43 | 43 | 41 | 41 | 40 | 40 | 40 | 39 |
| 60° | 58 | 58 | 56 | 56 | 55 | 54 | 53 | 53 | 52 | 50 |
| 70° | 67 | 65 | 64 | 63 | 61 | 60 | 59 | 58 | 56 | 55 |
| 90° | 85 | 83 | 82 | 80 | 78 | 76 | 75 | 74 | 72 | 71 |

附表5.2 $L = 20\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 14 | 14 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 30° | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 27 | 27 | 27 | 26 |
| 45° | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 40 | 40 | 40 | 39 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 54 | 53 | 51 | 50 | 50 |
| 70° | 68 | 67 | 65 | 64 | 63 | 62 | 62 | 60 | 59 | 58 |
| 90° | 87 | 85 | 82 | 81 | 78 | 77 | 75 | 74 | 72 | 71 |

附表5.3 $L = 20\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 30° | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 |
| 45° | 45 | 45 | 44 | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 42 | 42 |
| 60° | 58 | 57 | 57 | 56 | 56 | 55 | 54 | 53 | 53 | 53 |
| 70° | 68 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 59 | 58 | 58 |
| 90° | 85 | 81 | 79 | 79 | 77 | 75 | 75 | 74 | 73 | 73 |

附表5.4 $L = 20\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 27 |
| 45° | 44 | 43 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 41 | 40 | 40 |
| 60° | 58 | 56 | 55 | 54 | 54 | 54 | 53 | 53 | 52 | 52 |
| 70° | 66 | 66 | 65 | 63 | 62 | 62 | 61 | 61 | 60 | 59 |
| 90° | 87 | 85 | 84 | 80 | 79 | 77 | 75 | 74 | 73 | 72 |

附表5.5 $L = 20\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 |
| 45° | 45 | 44 | 44 | 43 | 43 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 55 | 55 | 54 | 53 | 53 | 52 | 52 |
| 70° | 69 | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 |
| 90° | 86 | 84 | 83 | 81 | 79 | 78 | 76 | 75 | 75 | 74 |

附表6.1 $L = 30\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 26 | 25 |
| 45° | 44 | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 40 | 39 | 39 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 55 | 53 | 51 | 51 | 50 | 48 | 47 |
| 70° | 68 | 66 | 64 | 62 | 61 | 59 | 58 | 57 | 55 | 55 |
| 90° | 85 | 81 | 79 | 77 | 75 | 72 | 71 | 68 | 67 | 65 |

附表6.2 $L = 30\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 30° | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 26 | 26 | 26 |
| 45° | 43 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 39 | 38 | 38 | 37 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 |
| 70° | 68 | 66 | 64 | 63 | 62 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 |
| 90° | 86 | 84 | 82 | 80 | 78 | 76 | 74 | 73 | 72 | 71 |

附表6.3 $L = 30\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| 45° | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 41 | 41 | 40 | 40 |
| 60° | 58 | 58 | 57 | 56 | 56 | 55 | 54 | 54 | 53 | 52 |
| 70° | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 62 | 61 | 60 |
| 90° | 86 | 85 | 84 | 82 | 80 | 79 | 78 | 76 | 74 | 73 |

附表6.4 $L = 30\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 |
| 45° | 43 | 43 | 42 | 42 | 42 | 41 | 41 | 40 | 40 | 40 |
| 60° | 58 | 57 | 57 | 56 | 55 | 55 | 54 | 54 | 53 | 52 |
| 70° | 66 | 66 | 64 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 |
| 90° | 85 | 83 | 82 | 81 | 80 | 78 | 77 | 75 | 74 | 73 |

附表6.5 $L = 30\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| 45° | 44 | 44 | 44 | 43 | 43 | 43 | 43 | 42 | 42 | 42 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 56 | 55 | 54 | 54 | 54 | 53 | 53 |
| 70° | 68 | 67 | 66 | 65 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 |
| 90° | 86 | 84 | 83 | 81 | 78 | 77 | 75 | 73 | 72 | 71 |

小学校における「振り子の等時性」の実験について

附表7.1 $L = 40\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 30 | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 |
| 45° | 44 | 43 | 42 | 41 | 41 | 40 | 39 | 39 | 38 | 36 |
| 60° | 58 | 55 | 54 | 52 | 49 | 48 | 48 | 46 | 45 | 45 |
| 70° | 66 | 64 | 63 | 60 | 59 | 57 | 55 | 53 | 52 | 50 |
| 90° | 84 | 80 | 76 | 74 | 70 | 67 | 64 | 63 | 61 | 59 |

附表7.2 $L = 40\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 29 | 28 | 28 | 27 | 27 | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 |
| 45° | 43 | 43 | 42 | 41 | 40 | 40 | 39 | 38 | 38 | 37 |
| 60° | 58 | 56 | 56 | 55 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 |
| 70° | 68 | 66 | 64 | 62 | 61 | 59 | 58 | 56 | 55 | 53 |
| 90° | 86 | 81 | 80 | 78 | 75 | 73 | 71 | 69 | 66 | 65 |

附表7.3 $L = 40\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 15 | 15 | 15 | 14 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 27 |
| 45° | 44 | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 41 | 40 | 40 |
| 60° | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 54 | 53 | 52 | 51 |
| 70° | 68 | 67 | 67 | 65 | 63 | 62 | 61 | 61 | 60 | 59 |
| 90° | 85 | 83 | 81 | 80 | 78 | 76 | 74 | 73 | 72 | 70 |

附表7.4 $L = 40\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| 45° | 45 | 44 | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 42 | 41 | 41 |
| 60° | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 55 | 54 | 53 | 53 | 52 |
| 70° | 67 | 66 | 65 | 64 | 62 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 |
| 90° | 85 | 83 | 80 | 79 | 78 | 76 | 75 | 74 | 72 | 71 |

附表7.5 $L = 40\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 |
| 45° | 44 | 44 | 43 | 43 | 43 | 42 | 42 | 41 | 41 | 41 |
| 60° | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 55 | 55 | 54 | 53 | 52 |
| 70° | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 |
| 90° | 84 | 82 | 78 | 78 | 76 | 75 | 74 | 72 | 71 | 70 |

附表8.1 $L = 50\text{cm}$ $m = 10\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 14 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 30° | 29 | 29 | 28 | 27 | 26 | 26 | 25 | 24 | 24 | 24 |
| 45° | 44 | 43 | 42 | 41 | 39 | 38 | 37 | 35 | 34 | 33 |
| 60° | 57 | 55 | 53 | 51 | 49 | 48 | 46 | 45 | 44 | 43 |
| 70° | 67 | 64 | 61 | 59 | 57 | 55 | 53 | 51 | 50 | 48 |
| 90° | 83 | 78 | 74 | 71 | 67 | 64 | 62 | 59 | 57 | 55 |

附表8.2 $L = 50\text{cm}$ $m = 20\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 15° | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 26 | 26 | 25 |
| 45° | 44 | 43 | 41 | 40 | 39 | 38 | 38 | 37 | 37 | 36 |
| 60° | 58 | 56 | 55 | 53 | 52 | 50 | 49 | 47 | 46 | 45 |
| 70° | 68 | 65 | 63 | 61 | 59 | 58 | 55 | 54 | 52 | 51 |
| 90° | 84 | 81 | 78 | 75 | 73 | 70 | 68 | 66 | 64 | 62 |

附表8.3 $L = 50\text{cm}$ $m = 30\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 27 | 27 | 26 |
| 45° | 44 | 43 | 42 | 42 | 41 | 40 | 40 | 39 | 38 | 38 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 |
| 70° | 68 | 66 | 64 | 63 | 61 | 60 | 59 | 58 | 56 | 55 |
| 90° | 84 | 81 | 78 | 75 | 73 | 70 | 68 | 66 | 64 | 62 |

附表8.4 $L = 50\text{cm}$ $m = 40\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 30 | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 |
| 45° | 44 | 44 | 43 | 43 | 43 | 42 | 41 | 41 | 40 | 40 |
| 60° | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 55 | 54 | 53 | 51 | 50 |
| 70° | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 62 | 60 | 58 | 58 |
| 90° | 85 | 83 | 82 | 80 | 78 | 76 | 74 | 72 | 70 | 68 |

附表8.5 $L = 50\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 2往復 | 3往復 | 4往復 | 5往復 | 6往復 | 7往復 | 8往復 | 9往復 | 10往復 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 5° | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 15° | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 30° | 29 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 27 |
| 45° | 44 | 43 | 43 | 42 | 42 | 42 | 41 | 41 | 40 | 40 |
| 60° | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 52 | 51 | 50 |
| 70° | 68 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 59 | 58 | 57 |
| 90° | 85 | 82 | 81 | 78 | 76 | 74 | 73 | 71 | 70 | 68 |

附表9 $L = 80\text{cm}$ $m = 50\text{g}$

| 初期角度 | 1往復 | 3往復 | 5往復 | 10往復 |
|------|------|------|-------|-------|
| 5° | 1.81 | 5.40 | 8.99 | 17.98 |
| 15° | 1.80 | 5.41 | 9.01 | 18.02 |
| 30° | 1.82 | 5.47 | 9.11 | 18.21 |
| 45° | 1.85 | 5.58 | 9.28 | 18.52 |
| 60° | 1.92 | 5.74 | 9.56 | 19.00 |
| 70° | 1.97 | 5.91 | 9.77 | 19.36 |
| 90° | 2.09 | 6.20 | 10.24 | 20.09 |

小学校における「振り子の等時性」の実験について